

FRISES & PAVAGES

On s'intéresse aux motifs (ou dessins)
du plan invariants par des translations.

Mathématiquement: On considère un ensemble
de points du plan (éventuellement de segments,
de faces, éventuellement colorés) $\mathcal{M}$ tel
qu'il existe au moins une translation $t_{\vec{u}}$
(avec $\vec{u}$ vecteur non-nul)

$$t_{\vec{u}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$$

C'est à dire que

1) Pour tout point $M \in \mathcal{M}$ $t_{\vec{u}}(M) \in \mathcal{M}$

(cette première condition s'écrit $t_{\vec{u}}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$)

2) Pour tout point M du plan

$$t_{\vec{u}}(M) \in \mathcal{M} \Rightarrow M \in \mathcal{M}$$

ce qui est l'inclusion réciproque.



• • • • •

Def: Pour un ensemble de points $\mathcal{M}$ du
plan $\text{Isom}(\mathcal{M})$ est l'ensemble des
isométries du plan qui laissent $\mathcal{M}$ globalement

invariant:

$$\text{Isom}(\mathcal{M}) = \{f \in \text{Isom}(\mathbb{P}) \mid f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\}$$

Prop: Pour tout ensemble de points $\mathcal{M}$ du plan, $\text{Isom}(\mathcal{M})$ est un groupe

Ici on s'intéresse aux ensembles de points $\mathcal{M}$ tels que $\text{Isom}(\mathcal{M})$ contient une translation non nulle.

Si $t_{\vec{u}} \in \text{Isom}(\mathcal{M})$ alors

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}} \in \text{Isom}(\mathcal{M})$$

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}} \in \text{Isom}(\mathcal{M})$$

Plus généralement :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad t_{k\vec{u}} \in \text{Isom}(\mathcal{M})$$

ex:



$$\overrightarrow{u_0}$$

$$\text{Isom}(\mathcal{M}) = \{ t_{k\overrightarrow{u_0}} \mid k \in \mathbb{Z} \} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{u_0}}$$

Une frise périodique est un motif $\mathcal{M}$ dont le groupe des isométries contient une translation $t_{\overrightarrow{u_0}}$ (avec $\overrightarrow{u_0} \neq \vec{0}$) et tel que toute translation t de $\text{Isom}(\mathcal{M})$ est de la forme $t_{k\overrightarrow{u_0}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

(pour tout $t \in \text{Isom}(\mathcal{M})$ si t est une translation alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = t_{k\overrightarrow{u_0}}$)

Si $M \in \mathcal{M}$ alors $t_{\overrightarrow{u_0}}(M)$, $t_{2\overrightarrow{u_0}}(M)$, $t_{3\overrightarrow{u_0}}(M)$ et aussi $t_{-\overrightarrow{u_0}}(M)$, $t_{-2\overrightarrow{u_0}}(M)$, etc. appartiennent à $\mathcal{M}$:

$\mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ est infini dans une direction

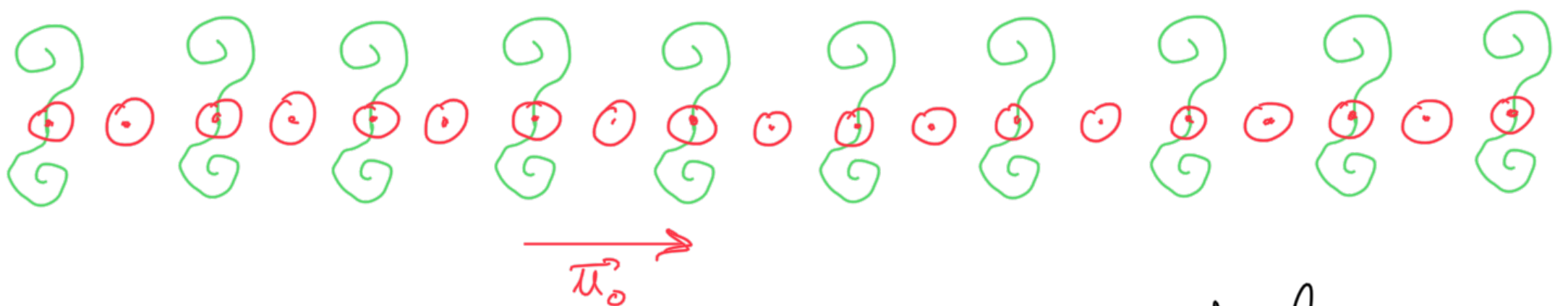


Pour $\mathcal{M}$ une frise périodique les isométries $f \in \text{Isom}(\mathcal{M})$ envoient $\overrightarrow{u_0}$ sur $\overrightarrow{u_0}$ ou $-\overrightarrow{u_0}$

(plus exactement $\forall f \in \text{Isom}(\mathcal{M}) \quad f(\vec{u}_0) = \vec{u}_0$ ou $f(\vec{u}_0) = -\vec{u}_0$, c'est la partie linéaire de l'isométrie affine qui agit sur les vecteurs)

En étudiant la classification des isométries du plan

f : symétrie centrale

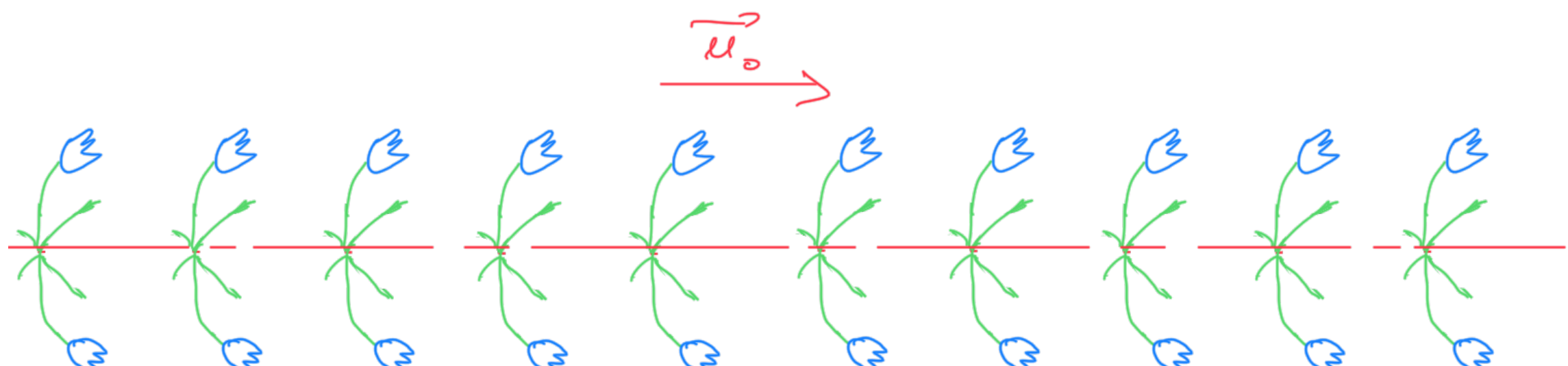


Remarquons que si la symétrie centrale s_Ω de centre Ω laisse $\mathcal{M}$ invariant alors

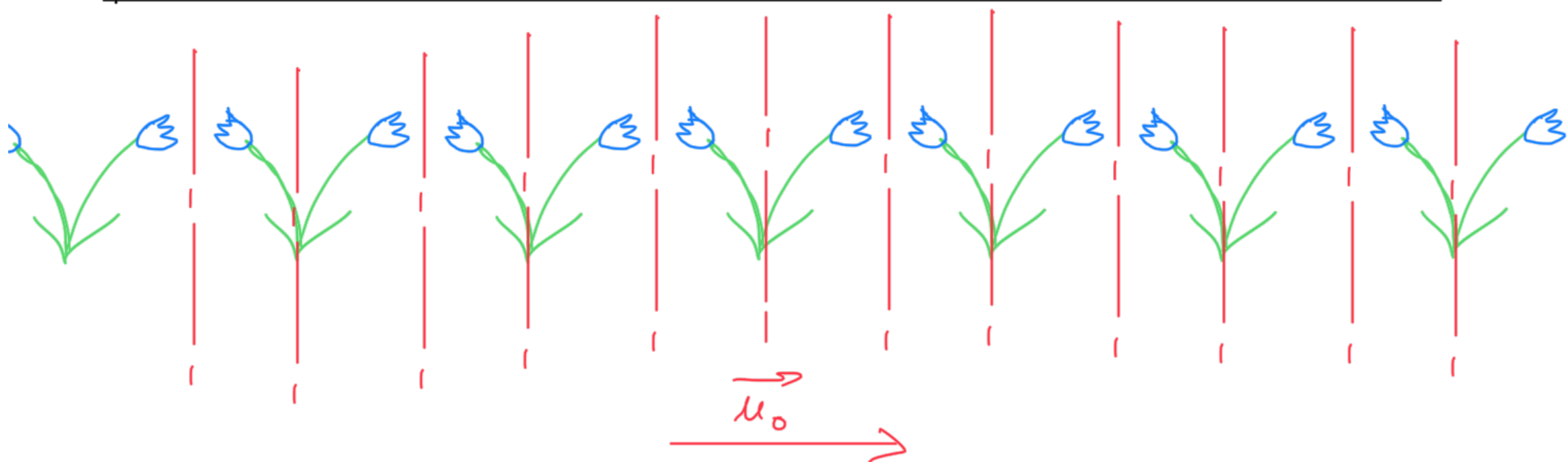
$$s_{\Omega'} = t_{\vec{u}_0} \circ s_\Omega \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega\Omega'} = \frac{1}{2} \vec{u}_0$$

est une autre symétrie centrale qui laisse $\mathcal{M}$ invariant.

f : symétrie d'axe dirigé par $\vec{u}_0$



f : symétrie d'axe orthogonal à $\vec{u}_0$

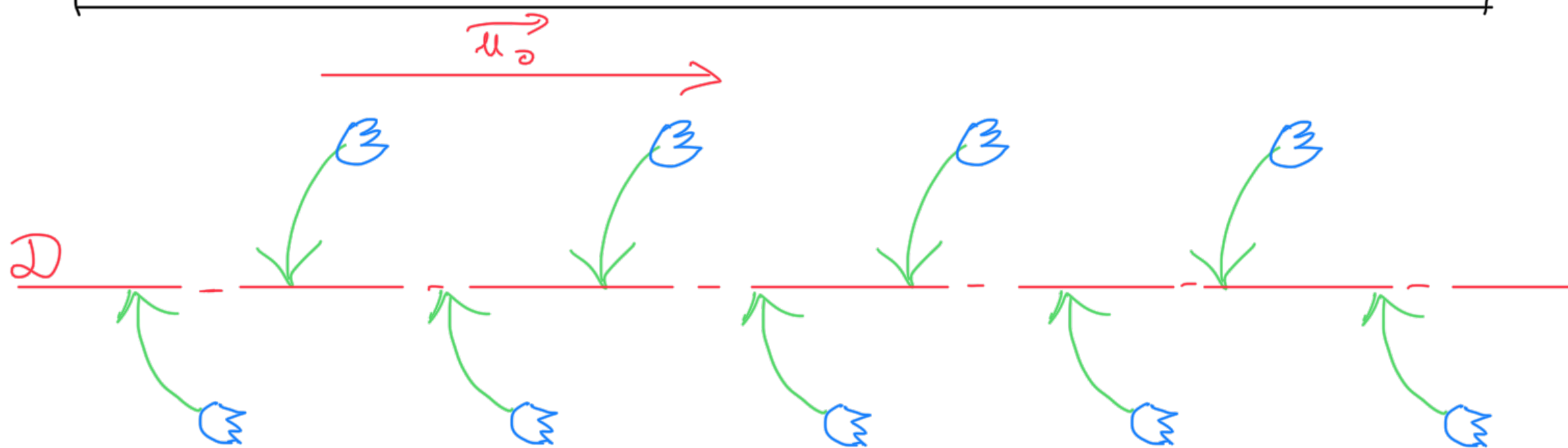


Comme ci-dessus

$$t_{\vec{u}_0} \circ s_D = s_{D'} \quad \text{ou}$$

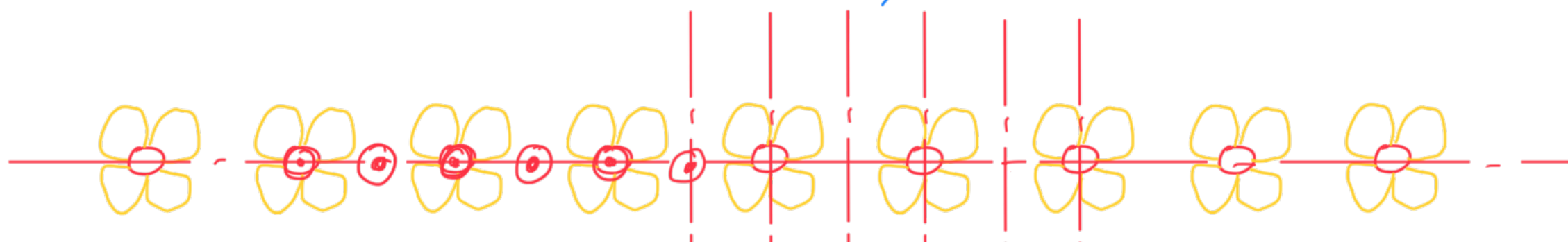
$$D' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}_0}(D) \quad \text{donc} \quad s_{D'} \in \text{Isom}(\mathcal{M})$$

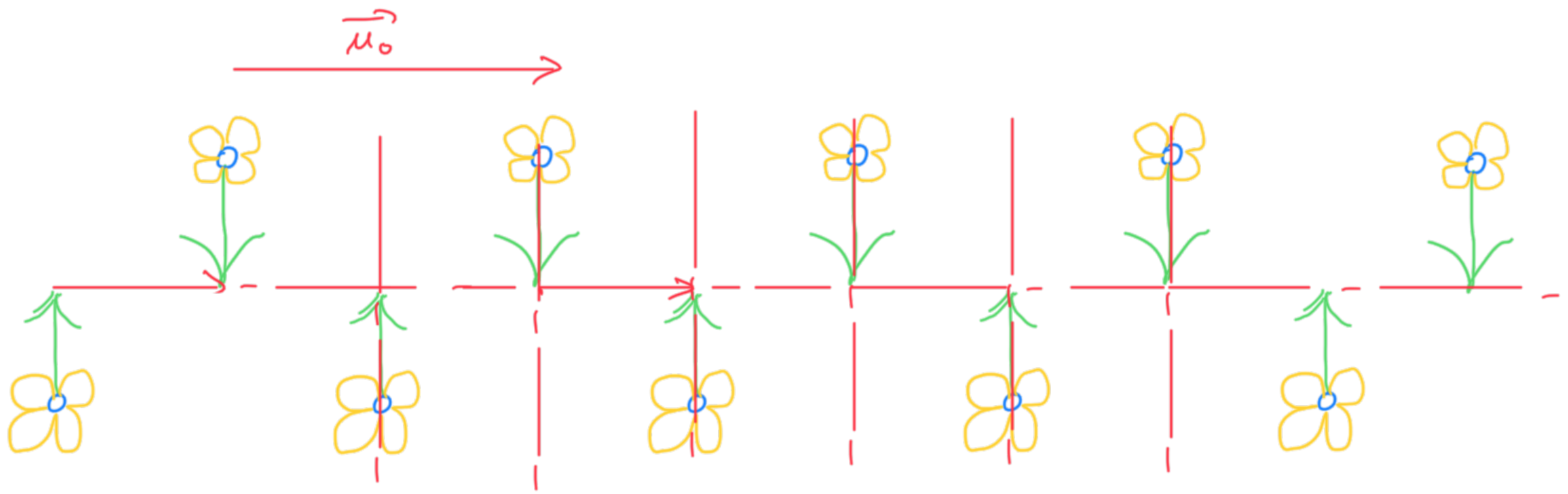
f : symétrie glissée d'axe dirigé par $\vec{u}_0$



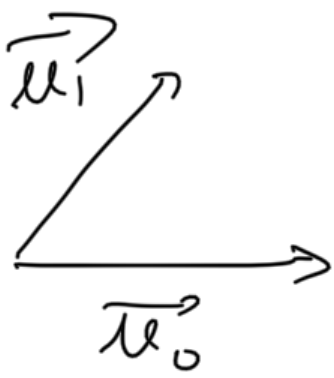
$$f = s_D \circ t_{\frac{1}{2}\vec{u}_0}$$

Il y a DEUX autres types de frises périodiques
(en combinant ces isométries)





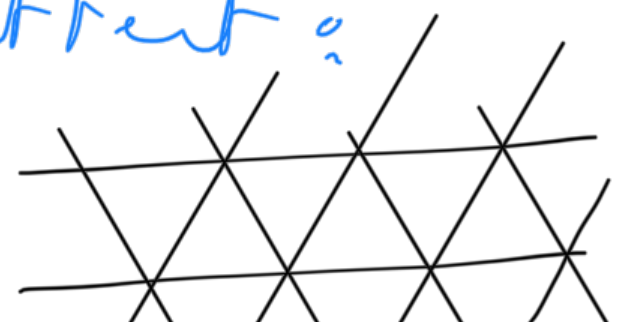
Un parage périodique est un motif invariant par deux translations de directions différentes

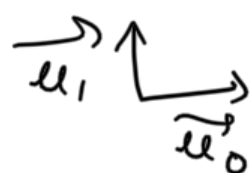
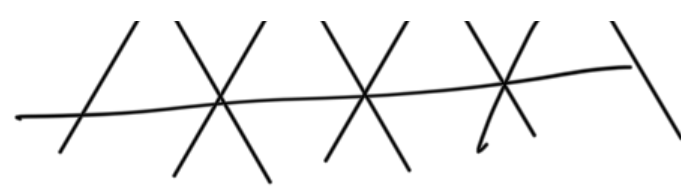
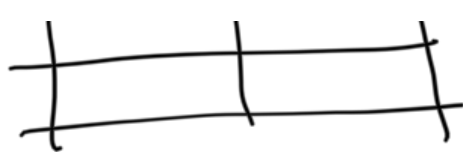


L'ensemble des vecteurs de translation laissant M invariant forme un réseau:

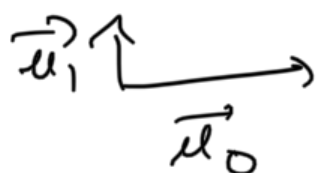
$$\mathbb{Z} \vec{u}_0 \oplus \mathbb{Z} \vec{u}_1 = \{a \vec{u}_0 + b \vec{u}_1 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Il y a plusieurs types de réseaux suivant les isométries qu'ils permettent :





orthorhombé
(ou carré)

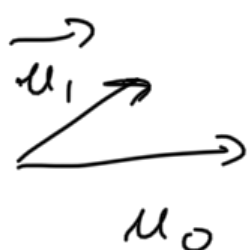
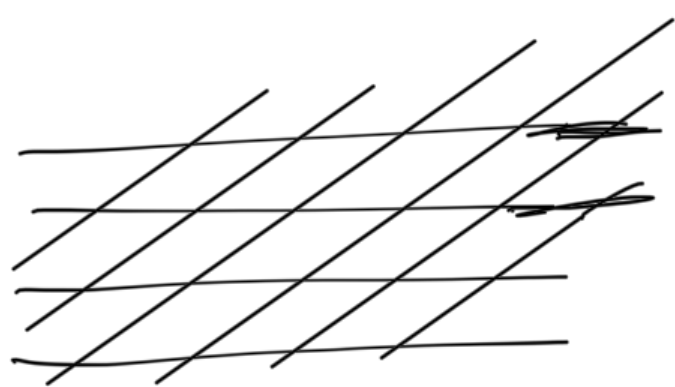


rectangulaire
(ou orthogonal)



$$\|\vec{u}_0\| = \|\vec{u}_1\|$$

hexagonal



Rhombique

Pour chacun de ces réseaux différents types de symétries sont possible

Et on obtient 17

(ou bien 23 suivant la façon de compter)

groupes de pavage de plan

On dit que tous ces types de pavages apparaissent dans le palais de l'Alhambra (الحمراء) à Grenade.

Je les ai tous répertoriés dans la vieille ville de Tunis sous la forme de zéliges (arabes) ou de motifs de stuc ou de

o v /
marbre.